Семинар из астрономије и астрофизике

уторак, 14. и 21. март 2017. године, у 18 сати
у учионици Катедре за астрономију

др Илија Лукачевић

(редовни професор у пензији, Математички факултет у Београду)

Слабо гравитационо поље

Кратак преглед једначина гравитационог поља по класичној општој релативности

Риман-Кристофелов (Riemann-Christoffel) тензор

$$R^{\alpha}_{\cdot\beta\gamma\delta} = \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} - \frac{\partial}{\partial x^{\delta}}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\varepsilon}_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\delta\varepsilon} - \Gamma^{\varepsilon}_{\beta\delta}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\varepsilon} \qquad (1.1)$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\varepsilon}\left(\frac{\partial g_{\delta\varepsilon}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\varepsilon\beta}}{\partial x^{\delta}} - \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^{\varepsilon}}\right) \qquad (1.2)$$

$\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}$ је Кристофелов симбол друге врсте.

Алгебарске идентичности за $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ су

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}\,, \quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}\,,$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}\,, \quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0 \qquad (1.3)$$

$R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ задовољава и Бјанкијеву (Bianchi) диференцијалну идентичност

$$\nabla_{\alpha} R_{\beta\gamma\delta\varepsilon} + \nabla_{\beta} R_{\gamma\alpha\delta\varepsilon} + \nabla_{\gamma} R_{\alpha\beta\delta\varepsilon} = 0 \qquad (1.4)$$

Контракцијом са $g^{\alpha\delta}$ добија се симетрични Ричијев (Ricci) тензор кривине и скаларна кривина R

$$R_{\beta\gamma} = g^{\alpha\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}\,, \quad g^{\beta\gamma} R_{\beta\gamma} = R \qquad (1.5)$$

Симбол ∇ означава коваријантно диференцирање.

Ако се над Бјанкијевом идентичности изврше контракције са $g^{\beta\varepsilon}$ и $g^{\alpha\delta}$, добије се

$$\nabla_{\alpha}\left(R^{\alpha}_{\gamma} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\gamma} R\right) = 0\,. \qquad (1.6)$$

Ајнштајнов тензор G^{α}_{γ} :

$$G^{\alpha}_{\gamma} \equiv R^{\alpha}_{\gamma} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\gamma} R \qquad (1.7)$$

чија је дивергенција, по (1.6), идентички једнака нули. У слободном простору он је једнак нули.

$$R^{\alpha}_{\gamma} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\gamma} R = 0 \iff R^{\alpha}_{\gamma} = 0 \Rightarrow R = 0 \qquad (1.8)$$

Тензор негравитационе енергије T^{α}_{γ} стоји на десној страни основних једначина

$$R^{\alpha}_{\gamma} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\gamma} R = -\varkappa T^{\alpha}_{\gamma} \qquad (1.9)$$

где је $\varkappa$ константа која димензионо изједначује гравитационе са другим физичким величинама.

Имамо

$$\nabla_{\alpha} G^{\alpha}_{\beta} = 0 \Rightarrow \nabla_{\alpha} T^{\alpha}_{\beta} = 0 \quad . \qquad (1.10)$$

Ричијев тензор $R_{\alpha\beta}$, изражен помоћу извода највишег реда

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\delta}} - \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\delta}} \right) + Q_{\alpha\beta}\left(g; \frac{\partial g}{\partial x}\right) \qquad (1.11)$$

Гравитациони потенцијал U у њутновском пољу задовољава хармонијску једначину

$$g^{ij}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^{k}_{ij}\frac{\partial U}{\partial x^k} \right) = 0 \quad (i,j,k = 1,2,3) \qquad (1.12)$$

За сферно симетрично тело у променљивим r, θ, φ то ће бити

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} = 0 \quad . \qquad (1.12a)$$

За сферно симетрично гравитационо поље у релативности се полази од облика метрике

$$\varepsilon\, ds^2 = e^{m(r,t)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) - c^2 e^{\nu(r,t)} dt^2 \qquad (1.13)$$

$(\varepsilon = \pm 1)$

Овај претпостављени облик метрике, на основу диференцијалних једначина (1.8), постаје коначно

$$\varepsilon\, ds^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) - c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 \qquad (1.14)$$

$(m = \mathrm{const})$

Ово је знаменито Шварцшилдово (Schwarzschild) решење.

Унутрашње (савршено хидростатичко) сферно симетрично гравитационо поље

Једначине гравитационог поља (1.9) сад гласе

$$G^{\alpha}_{\beta} = -\varkappa\left[(\rho + c^{-2}p) u_\beta u^\alpha + c^{-2} p\, \delta^{\alpha}_{\beta}\right] \qquad (2.1)$$

Уведемо ознаке $M(r)$ и $N(r)$ за прву и четврту компоненту метричког тензора.

$g_{11} = M(r)$, $g_{44} = -N(r)$, $u_i = u^i = 0 \quad (i = 1,2,3)$

$$g_{44}(u^4)^2 = -1 \Rightarrow u^4 = \frac{1}{\sqrt{-g_{44}}} = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad u_4 = -\sqrt{-g_{44}} = -\sqrt{N} \qquad (2.2)$$

Једначине гравитационог поља добиће облик (ставимо $c = 1$)

$$\left.\begin{aligned} G^1_1 &= -\frac{1}{M}\left(\frac{1}{rN}\frac{dN}{dr} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = -\varkappa p(r) \\ G^2_2 &= G^3_3 = \;\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad = -\varkappa p(r) \\ G^4_4 &= \frac{1}{M}\left(\frac{1}{rM}\frac{dM}{dr} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = \varkappa \rho(r) \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

Док једначине динамике флуида гласе, на основу (1.10) и (2.1),

$$\nabla_\beta T^\beta_\alpha = (\rho+p)u^\beta \nabla_\beta u_\alpha + (\delta^\beta_\alpha + u^\beta u_\alpha)\frac{\partial p}{\partial x^\beta} = 0 \quad . \quad (2.4)$$

С обзиром на услове (2.2), имаћемо за прве три једначине система (2.4)

$$(\rho+p)\Gamma^i_{44}(u^4)^2 + g^{i\beta}\frac{\partial p}{\partial x^\beta} = 0 \quad (c=1;\ i=1,2,3) \qquad (2.5)$$

што због дијагоналности метрике ($g_{\alpha\beta}=0, \alpha\neq\beta$) даје

$$g^{ii}\left[-\frac{1}{2}(\rho+p)\frac{\partial g_{44}}{\partial x^i}(u^4)^2 + \frac{\partial p}{\partial x^i}\right] = 0$$

односно, због $g^{ii}\neq 0$,

$$\frac{1}{2}(\rho+p)\frac{1}{N}\frac{dN}{dr} + \frac{dp}{dr} = 0 \qquad (2.6)$$

пошто N и p зависе само од r.

Последња од гравитационих једначина (2.3) може се написати као

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{M}\right) = 1 - \varkappa\rho r^2 \ .$$

Пошто константа $\varkappa$ износи $8\pi G$ (уствари $\frac{8\pi G}{c^4}$), где је G гравитациона константа, из горње једначине ћемо добити

$$\frac{r}{M(r)} = r - 2G\int_0^r 4\pi r^2\rho(r)\,dr = r - 2m(r) \qquad (2.7)$$

где је $m(r)$ маса небеског тела до границе интеграције r унутар њега. m је по димензији дужина.

Из (2.7) следује решење

$$M(r) = g_{11}(r) = \frac{1}{1-\frac{2m(r)}{r}} \Longrightarrow M(0)=1 \qquad (2.8)$$

Видимо да у тачки флуида делује само гравитациона сила масе смештене испод ње. Овим се у релативистичкој механици потврђује Гаусов резултат из њутновске механике.

Ако у прву једначину система (2.3) унесемо израз (2.8) за $M(r)$, као и израз за N'/N из (2.6), добићемо

$$\left(1-\frac{2m(r)}{r}\right)\left(\frac{1}{r^2}-\frac{2}{r(\rho+p)}\frac{dp}{dr}\right)-\frac{1}{r^2} = 8\pi G p \ .$$

Ако ово решимо по градијенту притиска, и то помножимо са r^2, добићемо релативистичку формулу за опадање притиска у радијалном правцу

$$-r^2\frac{dp}{dr} = m(r)\rho(r)\left(1+\frac{p(r)}{\rho(r)}\right)\left(1+\frac{4\pi G r^3 p(r)}{m(r)}\right)\left(1-\frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} \qquad (2.9)$$

Ово је Толман-Опенхајмер-Волковљева једначина (Tolman-Oppenheimer-Volkov). Примењује се и на равнотежна стања тешких честица (бариона).