О ПРИБЛИЖНО КРУЖНИМ ОРБИТАМА

Слободан Нинковић

Астрономска опсерваторија у Београду
sninkovic@aob.rs

галаксија (спирална)

Усвајају се стационарно стање - $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ и обртна симетрија - $\frac{\partial}{\partial \vartheta} = 0$ и зависност од $|z|$; R, ϑ, z координате.

Јака спљоштеност диска је последица $\frac{\langle \overline{\dot{z}^2} \rangle}{\langle \overline{V^2} \rangle} \ll 1$.

Брзина звезде у односу на средиште система: $\vec{V}$,
$\vec{V} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} \equiv \overline{\vec{V}}$, $\vec{v}$ - својствена брзина.
Следи: $\overline{V^2} = u^2 + \overline{v^2}$. Због стационарног стања $\vec{u}$ је брзина ротације. Хладан диск $\langle u^2 \rangle \gg \langle \overline{v^2} \rangle$.

Искуство показује да су дискови спиралних галаксија хладни. Орбита типичне звезде диска треба да буде приближно кружна.

Једначина кретања звезде: $m_i \frac{d\vec{V}}{dt} = m_p \nabla\Pi$, Π – потенцијал гравитације, $\Delta\,\Pi = -4\pi G\rho$; ρ – густина у систему. После скраћивања

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \nabla\Pi.$$

Интеграли кретања: $\frac{1}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2\right) - \Pi = E$, $J_z = R^2\dot{\vartheta}$.

Лагранжеве једначине:

$$\ddot{R} - \frac{{J_z}^2}{R^3} = \frac{\partial \Pi}{\partial R}$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial \Pi}{\partial z} \quad .$$

Због услова да орбита буде приближно кружна, тј. довољно близу криве $z = 0$, $R = \mathrm{const} = R_m$,

$$\Pi(R, z) = \Pi(R_m, 0) + \frac{\partial \Pi}{\partial R}(R_m, 0)\delta R +$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial R^2}(R_m, 0)\delta R^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}(R_m, 0)z^2 + \cdots, \ \delta R = R - R_m.$$

Обично се усваја: $J_z = R_m u_c(R_m)$, $u_c = \sqrt{-R\frac{\partial \Pi}{\partial R}}$.

Квази-интеграл $E_p = \frac{1}{2}\left(\dot{R}^2 + \frac{{J_z}^2}{R^2}\right) - \Pi(R, 0)$

Закључује се: E_p и J_z су f (R_m, e) , $e = \frac{|\delta R|_{max}}{R_m}$.

Усваја се: $E_p = \frac{1}{2} f {u_c}^2(R_m) - \Pi(R_m)$, f нема димензије и зависи од e, $e = 0$, $f = 1$.

$${J_z}^2(R_p, R_a) = (1 \mp e)^2 \left[f {u_c}^2(R_m) + 2\left(\Pi(R_p, R_a) - \Pi(R_m)\right)\right], \ R_p = R_m(1 - e)\ , \ R_a = R_m(1 + e)\ .$$

$$\Pi = \Pi(R_m) + \gamma_1 {u_c}^2(R_m)\frac{\delta R}{R_m} + \frac{1}{2}\gamma_2 {u_c}^2(R_m)\left(\frac{\delta R}{R_m}\right)^2$$

$${J_z}^2(R_p) = {R_m}^2 {u_c}^2[f - 2(f - 1)e - (4 - f - \gamma_2)\, e^2],$$

$${J_z}^2(R_a) = {R_m}^2 {u_c}^2[f + 2(f - 1)e - (4 - f - \gamma_2)\, e^2].$$

Следи: $f = 1 \quad \wedge \quad f = 1 + \nu e^2$.

Ако је $f = 1$, онда је
$J_z{}^2 = R_m{}^2 u_c{}^2[1 - (3 - \gamma_2)e^2]$.

На растојањима $R = R_p$ и $R = R_a$ E_p =const се своди на једнакост ефективног потенцијала јер је тада $\dot{R} = 0$. Према томе

$$\frac{J_z{}^2}{R_m{}^2}\left[\frac{1}{(1-e)^2} - \frac{1}{(1+e)^2}\right] = 2\left[\Pi\left(R_p\right) - \Pi\left(R_a\right)\right]$$, па је

$$J_z{}^2 = R_m{}^2 u_c{}^2(1 - 2e^2) .$$

Онда $f = 1 + (1 - \gamma_2)\mathrm{e}^2$.

Тражи се решење $R(t)$ полазећи од E_p =const

$$t = \int_{R_p}^{R} \frac{dR'}{\sqrt{2(E_p + \Pi) - \frac{J_z^{\,2}}{R'^2}}}$$

$$t = \frac{R_m}{u_c} \frac{1}{\sqrt{3 - \gamma_2}} \int_{-e}^{\delta\chi} \frac{d\delta\chi'}{\sqrt{e^2 - \delta\chi'^2}}$$

$$\delta\chi = \delta R / R_m$$

$$t = \frac{1}{2\pi} \frac{P_{circ}}{\sqrt{3 - \gamma_2}} \int_{-1}^{\phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varphi^2}}$$

На крају

$$R = R_m\left[1 + e\sin\left(\frac{2\pi}{P_a}t - \frac{\pi}{2}\right)\right];$$

$$P_a = \frac{P_{circ}}{\sqrt{3-\gamma_2}}.$$

Уводи се $u_c(R) \propto R^{\delta}$, $\delta = \delta(R_m)$, следи
$\gamma_2 = -(2\delta - 1)$.

За $\delta \leq 0$: $E_p = \frac{1}{2}{u_c}^2(R_m) - \Pi(R_m)$,
${J_z}^2 = {R_m}^2{u_c}^2(R_m)\{1 - 2[\delta(R_m) + 1]e^2\}$;
$\delta \geq 0$: $E_p = \frac{1}{2}[1 + 2\delta(R_m)e^2]{u_c}^2(R_m) - \Pi(R_m)$,
${J_z}^2 = {R_m}^2{u_c}^2(R_m)(1 - 2e^2)$.

S. Ninković, Acta Astronomica, 71, 73-88, 2021.

ХВАЛА НА ПАЖЊИ!