

**Zlatko Čatović**

*Ontario Power Generation, Toronto, Canada*

**Bojan Arbutina**

*Katedra za astronomiju, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu*

***Rozenova bimetrička teorija  
gravitacije i doprinos prof. Ilije  
Lukačevića (1935-2020)***

---

*Seminar Katedre za astronomiju, 17. novembar 2020.*

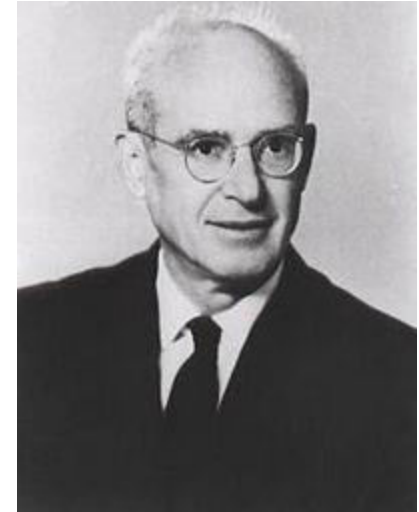
- **Nejtan Rozen** bio je američko-izraelski fizičar. Rođen je 22. marta 1909 u Bruklinu, Njujork, preminuo 18. decembra 1995. u Haifi.

- Završio je osnovne studije elektrotehnike i, kasnije, magistarske i doktorske studije fizike na MIT (1932)

- U periodu 1934--1936, radi na Prinstonu (Institute for Advanced Study, Princeton) kao Ajnštajnov asistent. U tom periodu objavili su nekoliko zajedničkih radova. U periodu 1936-1938, boravio je u Sovjetskom Savezu, gde je dobio poziciju profesora fizike na Kijevskom univerzitetu. Nakon toga vraća se u SAD i od 1941. do 1952. predaje na Univerzitetu Severne Karoline (University of North Carolina at Chapel Hill).

- Godine 1952. trajno se seli u Izrael gde radi na Technion-u – Izraelskom institutu za tehnologiju u Haifi. Aktivno se bavio naukom, praktično do kraja života. Pored toga obavljao je razne funkcije, uključujući funkcije šefa katedri i dekana više fakulteta na Technion-u, a učestvovao je u osnivanju i radu brojnih izraelskih naučnih društava i institucija, poput Izraelske akademije nauka. U periodu 1969-1971 bio je dekan Tehničkog fakulteta Univerziteta Negev (kasnije Ben-Gurion).

- Značajan rani doprinos dao je na polju kvantne fizike svojim radom na objašnjenju molekula vodonika ([N. Rosen, "Normal state of the hydrogen molecule", Phys. Rev., 38, 2099 \(1931\)](#))



Nathan Rosen  
(1909–1995)

- Ovo je verovatno bila inspiracija za kasniji rad sa Ajnštajnom i Podolskim i diskusiju spregnutih talasnih funkcija ("*entangled*" *wavefunctions*) odnosno "kvantnog sprežanja" (A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?", *Phys. Rev.*, 47, 777 (1935))
- **EPR paradoks**: misaoni eksperiment u kojem merimo položaj ili impuls jedne od dve čestice u spregnutom stanju. Položaj ili impuls druge čestice onda mora biti poznat pre merenja, iako čestice mogu biti na takvom rastojanju da nije moglo doći do prenosa informacije (maksimalnom brzinom =  $c$ )
- Ajnštajn: "sablasno dejstvo na daljinu", kolaps talasne funkcije, nelokalni karakter kvantne mehanike ili neke fundamentalnije teorije koja se krije iza nje?
- Rozenov rad na teoriji relativnosti – daleko obimniji
- **Ajnštajn–Rozenov most** = crvotočina (*wormhole*) – crnoj rupi u kojoj materija nestaje prolaskom kroz horizont događaja, odgovara bela rupa kroz kojoj materija izlazi (A. Einstein and N. Rosen, "The particle problem in the general theory of relativity", *Phys. Rev.*, 48, 73 (1935))

- U slučaju Švarcšildove metrike, signature (+ - - -), uz odgovarajuću smenu:

$$ds^2 = -\frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2$$

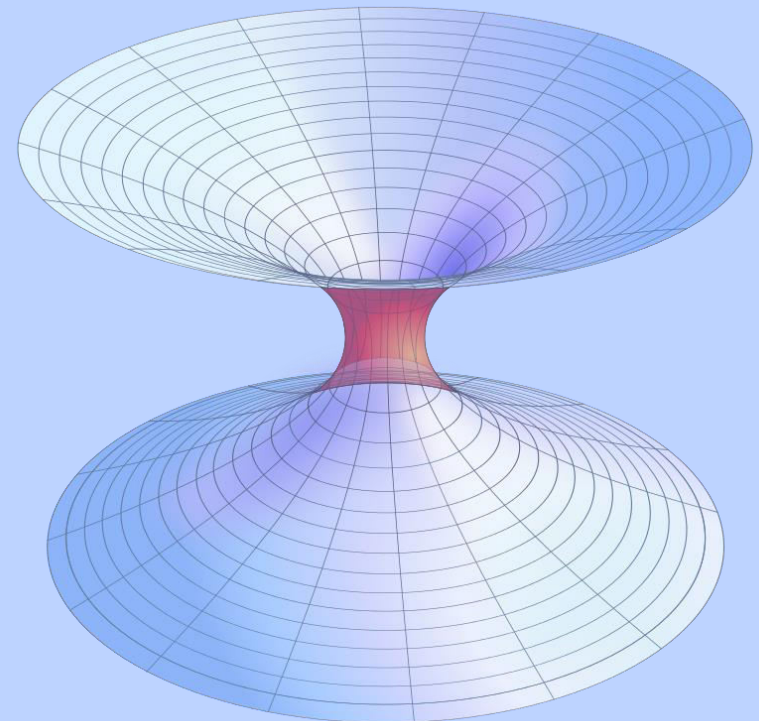
$$u^2 = r - 2m$$

$$ds^2 = -4(u^2 + 2m) du^2 - (u^2 + 2m)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + \frac{u^2}{u^2 + 2m} dt^2$$

- slučajevi  $u > 0$  i  $u < 0$  mogle bi opisivati dve oblasti Univerzuma, ili dva univerzuma, povezana crvotočinom.

- Robert Fuller i Džon Viler pokazali da su ovakve crvotočine nestabilne (R. W. Fuller and J. A. Wheeler, Phys. Rev. 128, 919 (1962))

- Moris i Torn predložili da bi se mogle stabilizovati prisustvom negativne mase-energije (M. S. Morris and K. S. Thorne, Am. J. Phys. 56, 395 (1988)).



- **Bimetrička teorija gravitacije** (Rosen, Nathan (1940), "General Relativity and Flat Space. I", Phys. Rev., 57 (2): 147; Rosen, Nathan (1940), "General Relativity and Flat Space. II", Phys. Rev., 57 (2): 150)

- Dve metrike: prva opisuje gravitaciono polje, druga ravan prostor

$$1. ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad 2. d\sigma^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j$$

$$\Delta_{jk}^i = \{^i_{jk}\} - \Gamma_{jk}^i \quad \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + \Delta_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad - \text{jednačine kretanja}$$

$$N_j^i - \frac{1}{2} \delta_j^i N = -8\pi\kappa T_j^i \quad - \text{jednačine polja}$$

$$N_j^i = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\beta} (g^{hi} g_{hj/\alpha})_{/\beta} = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\beta} \left\{ (g^{hi} g_{hj,\alpha})_{,\beta} - (g^{hi} g_{mj} \Gamma_{h\alpha}^m)_{,\beta} - \gamma^{\alpha\beta} (\Gamma_{j\alpha}^i)_{,\beta} \right. \\ \left. + \Gamma_{\lambda\beta}^i [g^{h\lambda} g_{hj,\alpha} - g^{h\lambda} g_{mj} \Gamma_{h\alpha}^m - \Gamma_{j\alpha}^\lambda] \right. \\ \left. - \Gamma_{j\beta}^\lambda [g^{hi} g_{h\lambda,\alpha} - g^{hi} g_{m\lambda} \Gamma_{h\alpha}^m - \Gamma_{\lambda\alpha}^i] + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda [g^{hi} g_{hj,\lambda} - g^{hi} g_{mj} \Gamma_{h\lambda}^m - \Gamma_{j\lambda}^i] \right\}$$

$$N = g^{ij} N_{ij}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}$$

- Rozen nastavio da usavršava teoriju i objavljuje radove, 1940-1990. (Bimetric General Relativity (Rosen 1979,1980).)

- Švarcšildovo rešenje u OTR (videti npr. [Lukačević 2009](#)):

$$\varepsilon ds^2 = \frac{d\rho^2}{1 - \frac{2m}{\rho}} + \rho^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\lambda^2) - \left(1 - \frac{2m}{\rho}\right)c^2 dt^2 \quad \varepsilon = \pm 1 .$$

$$\rho = r\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2 \quad - \text{ izotropne koordinate}$$

$$\varepsilon ds^2 = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 [dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\lambda^2)] - \left(\frac{2r - m}{2r + m}\right)^2 c^2 dt^2 .$$

- statično sfernosimetrično rešenje u Rozenovoj teoriji:

$$\varepsilon ds^2 = e^{\frac{2M}{r}} [dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\lambda^2)] - e^{-\frac{2M}{r}} c^2 dt^2 .$$

- Različito ponašanje u jakom polju, ali to nije presudno za Sunčev sistem, teorija daje različito predviđanje gubitaka energije usled emisije gravitacionih talasa koje nije u skladu sa posmatranjima Hals-Tejlorovog dvojnog pulsara ([Will, Clifford \(1992\). The renaissance of general relativity](#)". In [Davies, Paul \(ed.\). The New Physics. Cambridge University Press. p. 18](#))

- veliki uticaj na druge teorije

- **Tamna materija:** MOND - Modified Newtonian dynamics (Milgrom, M. (1983). "A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis". *Astrophysical Journal*. 270: 365–370)

$$F = m a \mu(x) \quad x = \frac{a}{a_0} \quad - \text{modifikacija II Njutnovog zakona}$$

$$\mu(x) \longrightarrow 1 \quad x \gg 1 ,$$

$$\mu(x) \longrightarrow x \quad x \ll 1 .$$

- alternativno modifikacija Njutnovog zakona gravitacija

$$\frac{GMm}{\mu\left(\frac{a}{a_0}\right) r^2}$$

-Bekenštajnova relativistička verzija (Jacob D. Bekenstein (2004). "Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm". *Phys. Rev. D* 70 (8): 83509)

- **BI-MOND** (Milgrom, M. (2009). "Bimetric MOND gravity". *Phys. Rev. D*. 80 (12))

- **Tamna energija:** negativna masa? - bimetrička teorija (Petit, J.P.; d'Agostini, G. (2014). "Negative mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy". *Astrophysics and Space Science*. 354 (2): 611)

- **Ilija Lukačević** rođen je 13. novembra 1935. godine u Beogradu. Diplomirao je 1960. godine, a magistarski rad odbranio 1965. godine. Doktorirao je 1968. godine u oblasti mehaničkih nauka na PMF u Beogradu (sa disertacijom *Alfenovi talasi u relativističkoj magneto-hidrodinamici*).

- U školskoj godini 1966/67. usavršavao se, kao francuski stipendista, u oblasti relativističke mehanike, kod profesora Lišneroviča (Andre Lichnerowicz), u Parizu. Za asistenta je postavljen 1961. godine, za docenta 1970, za vanrednog profesora 1979, a za redovnog profesora 1986. godine.

- Objavio je više naučnih radova, kao i univerzitetski udžbenik *Osnove teorije relativnosti* (Naučna knjiga, Beograd, 1980). Učestvovao je nekoliko međunarodnih i nacionalnih konferencija, a držao po pozivu dvaput predavanja u Moskvi, jednom u Parizu i jednom u Budimpešti. Držao predavanja iz Teorije relativnosti, Magnetohidrodinamike, Racionalne mehanike, Analitičke mehanike i Tenzorskog računa s primenama u mehanici. Bio je upravnik Instituta za mehaniku. Blisko je saradivao i držao nekoliko predmeta na Katedri za astronomiju. Bio je član Međunarodne astronomske unije, Jugoslovenskog društva za mehaniku, Društva astronoma Srbije, recenzent za *Mathematical Reviews*, *Serbian Astronomical Journal*...

- Preminuo je u Beogradu 14. juna 2020.



Ilija Lukačević  
(1935–2020)





















## - Spisak naučnih radova I. Lukačevića

1. Lukačević, I.: Sur l'invariance des équations canoniques d'un système non conservatif en mécanique, Publ. Inst. Math., 4(18), 1964, 7-11.
2. Lukačević, I.: Neke primedbe o vektoru vrtloga relativističkog fluida, Mat. Vesnik, 1(6), 1964, 330-332.
3. Lukačević, I.: Sur le mouvement irrotationnel des fluides parfaits chargés en relativité générale, Publ. Inst. Math. 7(21), 1967, 7-11.
4. Lukačević, I.: Sur les ondes d'Alfen en magnétohydrodynamique relativiste, Ann. Int. Henri Poincaré, VIII, no. 3, 1968, 217-240
5. Lukačević, I.: O nekim svojstvima magnetohidrodinamičkih talasa u relativnosti, Zbornik radova IX Jugoslovenskog kongresa za racionalnu i primenjenu mehaniku, SITJ, 1968, 289-292.
6. Lukačević, I.: Ondes d'Alfen et perturbations des tenseurs de courbure en relativité générale, Mat. vesnik 6(21), 1969, 365-372.
7. Lukačević, I.: Chocs et ondes rotatoires de la magnétohydrodynamique relativiste, Ann. Inst. Henri Poincaré, XIV, no. 3, 1971, 219-243.
8. Lukačević, I.: On Some Properties of Relativistic MHD Flows, Proceedings of the First European Astronomical Meeting, Athens, September 1972, 3, Springer Verlag, 1974, 183-189.
9. Lukačević, I.: On Born's Relativistic Rigidity and Some Properties of MHD Steady Flows, Teorijska i primenjena Mehanika, 1, 1975, 23-32.
10. Lukačević, I.: On Relative Deformation and Vorticity in Relativistic Kinematics, Publ. Inst. Math., 19(33), 1975, 101-110.

11. Lukačević, I.: Relativistic Relative Deformation and Vorticity Applied to Magnetohydrodynamics, *Publ. Inst. Math.*, 22(36), 1977, 175-185.
12. Lukačević, I.: Relativistic Relative Kinematic Quantities and Some of Their Applications, *Fizika (A Jr. of Exp. and Theor. Phys.)*, 12, suppl. 3, 1980, 1-8.
13. Lukačević, I.: The World Lines of Isotropic Expansion in the de Sitter Universe, *Publ. dept. Astr. Univ. Beograd*, 12, 1983, 19-25.
14. Lukačević, I.: On General Relations in Relativistic Kinematics and Some of Their Applications, *Gen. rel. Grav.*, Vol. 15, no. 6, 1983, 523-533.
15. Lukačević, I.: O proširenom sistemu relativističkih kinematičkih veličina s nekim primenama u magnetohirodinamici, *Recuel des travaux de l'Institut mathématique, Nouvelle serie*, 4(12), 1984, 121-125.
16. Lukačević, I.: On Conformally Related Fields in Rosen's Bimetric Gravitation Theory, *Gen. Rel. Grav.*, Vol. 18, no. 9, 1986, 923-930.
17. Lukačević, I.: On the conformal Transformations on Metrics in Rosen's Bimetric Gravitation Theory, *Gen. Rel. Grav.* Vol. 19, no. 9, 1987, 907-916.
18. Lukačević, I.: On the Relativistic Kinematic and Geometric Quantities and Their Applications, *Bulletin XCVII de l'Academie Serbe des Sciences*, no. 16, 1989, 9-16.
19. Lukačević, I.: Conformally Equivalent Metrics in Bimetric General Relativity, *Gen. Rel. Grav.*, Vol. 22, no. 7, 1990, 721-734.
20. Lukačević, I., Milanović, S.: On the Application of Bimetric Relations in Elasticity, *Int. Jr. Solids and Structures*, Vol. 26, no. 7, 1990, 813-820.

## ADS = Astrophysics Data System (posle 1990)

- 
- 21  1992GReGr..24..827L 1992/08 cited: 2     
Nonstatic spherically symmetric space-times in Rosen's bimetric gravitation theory  
Lukacević, I.; Čatović, Z.
- 22  1994BABel.149...27L 1994/07     
On the orbital motion of a body in a spherically symmetric field in Rosen's bimetric gravitation theory.  
Lukačević, I.
- 23  1995BABel.152...49L 1995/11     
On the orbits in nonstatic spherically symmetric fields in Rosen's bimetric gravitation theory.  
Lukačević, I.
- 24  1996Vasio..44...24L 1996     
In memoriam: Hannes Alfvén (30 May 1908 - 2 April 1995).  
Lukačević, I.
- 25  1996POBeo..54...75L 1996/10     
On the orbital motion of a body in a spherically symmetric field in Rosen's bimetric gravitation theory.  
Lukačević, I.
- 26  2009POBeo..86..173L 2009/09     
Some Remarks Concerning the Accelerated Orbital Motion of Celestial Bodies  
Lukacevic, I.

- 1960-ih prof. Rastko Stojanović, prof. Marko Leko i **prof. Ilija Lukačević**, počinju studije iz teorije relativnosti (specijalne i opšte) na Katedri za mehaniku Matematičkog fakulteta.
- **Prof. I. Lukačević**, kako se vidi iz njegove doktorske disertacije i bibliografije, u svojim početcima bio je zainteresovan za relativističku generalizaciju Alfenovih udarnih talasa klasične magnetohidrodinamike.
- Sredinom 1980-ih počinje interesovanje **prof. I. Lukačevića** za alternativne teorije gravitacije i posebno Rosenove teorije gravitacije.
- Glavni rezultat i doprinos **prof. I. Lukačevića** bimetričkoj teorije gravitacije, jeste prezentovan i analiziran u njegovim radovima štampanim u *Gen. Relativ. Gravit.* 1986, 1987 i 1990:
- **Svako rešenje Rosenovih jednačina polja može biti uopšteno sa konformnim faktorom  $e^{2\phi}$  gde je funkcija  $\phi$  rešenje talasne jednačine u prostoru Minkovskog (poznate kao D’Alambert-ove jednačine).**
- **OTR dopušta samo konstantne konformne faktore.**

$$\tilde{g}_{\lambda\rho} = e^{2\Phi} g_{\lambda\rho} \quad \Phi|_{\alpha\alpha} = 0$$

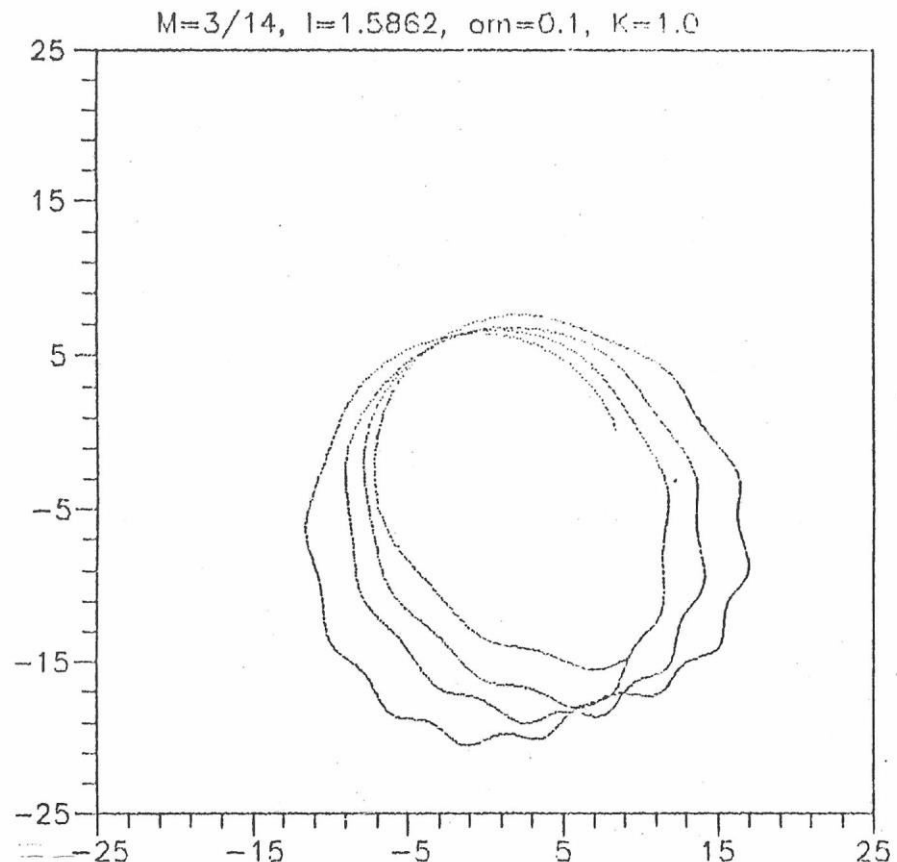
- Rezultati koje je C. Will objavio 1977. u vezi sa orbitalnom analizom dvojnog pulsara PSR 1916+13, pokazali su da orbitalni period ovog pulsara raste, što je u suprotnosti sa posmatranjima.

- **Prof. I. Lukačević** je za Will-ovu analizu saznao krajem 1980-ih (doba pre interneta!)

- Negde u to vreme počela je i saradnja Z. Čatovića sa prof. Lukačevićem.

- Započeto je ispitivanje da li konformni faktor može da promeni sudbinu Rozenove teorije.

$$\Phi = \frac{K}{r} \sin(\omega r) \cos(\omega t)$$



- Lukačevićev konformni faktor otvara mogućnosti za Rozenovu teoriju – barem u oblasti orbitalne mehanike ([Lukačević & Čatović 1992](#))

The solutions of (8), which satisfy the second inequalities of (16) and (19) respectively are the ones which we think interesting. That is because the first inequality (16) has been chosen to agree with the well-known phenomenon of the acceleration of orbital motion in the binary pulsar PSR 1913+16 (Ref. 7, Sections 12.2–12.4). The first inequality (19) has been similarly chosen to agree with the decrease of mutual distance in the binary system cited. We restricted ourselves to the idealized approach provided by the one-body problem, but our intention was only to establish the simplest possibility for accelerated and radially decreasing orbiting as the consequence of the existence of an additional nonstatic field.

- [Lukačević \(1994, 1995\)](#) nastavlja analizu nestatičkih metrika u Rozenovoj teoriji sa uslovima koje konformni faktor treba da zadovoljava da bi orbitalna mehanika u teoriji bila u skladu sa posmatranjima.
- Nije poznato da li je Clifford Will saznao za konformne faktore u Rozenovim nestatičkim rešenjima...

***HVALA NA PAŽNJI!***

---